*IOSR Journal of Business and Management (IOSR-JBM)*
*e-ISSN:2278-487X, p-ISSN: 2319-7668. Volume 26, Issue 7. Ser. 3 (July. 2024), PP 01-05*
*www.iosrjournals.org*

# Relation de récurrence pour les intégrales en analyse mathématique

Par Mazalo Kasereka Désiré
*Assistant à* l'ISP-OICHA/RD Congo

***Résumé***
*Le secret de la réussite de calcul intégral repose sur la connaissance parfaite des primitives des fonctions usuelles (polynôme, puissance $n^è$, circulaire, hyperbolique, homographique, …) ; mais aussi sur les techniques usuelles d'intégration (intégration par parties, intégration par changement de variable). Cependant, il est évident que ces connaissances ne valent rien du tout si on n'y associe l'esprit intuitif relatif aux transformations des fonctions ou de leurs simplifications à travers des artifices de calculs lorsqu'il s'avéra nécessaire.*
*Cet article a donc pour souci d'établir des formules intégrales à partir de la méthode d'intégration par parties en analyse mathématique ; des formules déductives appelées « relations de récurrence ».*
*Les mathématiciens, les physiciens ou les chercheurs pourront alors recourir à ces formules de récurrence lors de calcul intégral et trouver dans un temps amoindri ou sans beaucoup dépenser l'énergie de l'intelligence, les primitives de plusieurs fonctions (mathématiques).*
***Abstract***
*The secret of successful integral calculation lies in perfect knowledge of the primitives of the usual functions (polynomial, power nè, circular, hyperbolic, homographic, etc.); but also on the usual integration techniques (integration by parts, integration by change of variable). However, it is obvious that this knowledge is worthless at all if we do not associate it with the intuitive mind relating to the transformations of functions or their simplifications through calculation tricks when it proves necessary. This article therefore aims to establish integral formulas using the method of integration by parts in mathematical analysis; deductive formulas called "recurrence relations". Mathematicians, physicists or researchers will then be able to use these recurrence formulas during integral calculation and find, in less time or without much expenditure of intellectual energy, the primitives of several (mathematical) functions.*

---

Date of Submission: 26-06-2024 Date of Acceptance: 03-07-2024

---

## I. Introduction

Les relations de récurrence pour les intégrales constituent un sujet fondamental en analyse mathématique, offrant des outils puissants pour résoudre des intégrales complexes et étudier les propriétés des fonctions intégrales.[1] Cette méthode repose sur la capacité à exprimer une intégrale en fonction de termes précédents de la même intégrale, ce qui permet souvent de simplifier considérablement l'évaluation d'intégrales difficiles ou de trouver des solutions élégantes à divers problèmes mathématiques.[2]

En mathématique, l'intégration ou le calcul intégral est l'une des deux branches du calcul infinitésimal, l'autre étant le calcul différentiel.

Les intégrales sont utilisées dans de multiples disciplines scientifiques notamment en physique pour des opérations de mesure de grandeurs (longueur d'une courbe, aire, volume, flux) ou en probabilités. Ses utilités pluridisciplinaires en font un outil scientifique fondamental. C'est la raison pour laquelle l'intégration est souvent abordée dès l'enseignement secondaire.

Le concept d'intégrale a été raffiné depuis son introduction au XVIIè siècle pour Leibniz et Newton, permettant ainsi de les calculer pour des fonctions de moins en moins régulières. On rencontre ainsi aujourd'hui les intégrales dites de Riemann, de Lebesgue ou de Kwizweil-Henstock. Mais toutes ces définitions coïncident dans le cas des fonctions continues sur un segment.

---

[1] Graham, Ronald L.; Knuth, Donald E.; Patashnik, Oren (February 1994). *Concrete Mathematics* - A foundation for computer science (2nd ed.).
[2] Knuth, Donald E. (1997). "Mathematical Preliminaries". The Art of Computer Programming, Volume 1. Fundamental Algorithms (3rd ed.).

Les physiciens, et surtout les probabilistes n'ont pas besoin de grands détails de calcul de ces intégrales, mais des formules déduites qu'ils appliqueront pour obtenir immédiatement des résultats.
C'est ainsi que, durant cette investigation, nous avons voulu répondre aux questions telles que :

- À part les intégrales immédiates usuelles, existe-t-il d'autres formules ou relations pouvant offrir la possibilité d'obtenir en chaîne la primitive des fonctions ?
- Quelles sont les relations de récurrence les plus remarquables qui résultent de l'intégration par parties ?

Telles sont les questions qui susciteront notre vive attention dans les lignes qui suivent tout en nous orientant dans le domaine purement scientifique.
Les objectifs spécifiques assignés restent les suivants :

- Montrer qu'il existe un bon nombre de formules déduites pouvant raccourcir l'obtention de la primitive d'une fonction compliquée.
- Disponibiliser une liste de relations de récurrence pour les intégrales en analyse mathématique.

Cette méthode des relations de récurrence pour les intégrales repose sur la capacité à exprimer une intégrale en fonction de termes précédents de la même intégrale, ce qui permet souvent de simplifier considérablement l'évaluation d'intégrales difficiles ou de trouver des solutions élégantes à divers problèmes mathématiques.

## II. Notion d'intégration par parties

L'intégration par parties est une technique fondamentale en calcul intégral qui permet de transformer une intégrale en un produit d'une fonction et de sa dérivée, facilitant ainsi son évaluation.[3] L'intégration par parties (I.P.P) est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales.
Le mathématicien Brook Taylor a découvert l'intégration par parties, publiant d'abord l'idée en 1715. Des formules plus générales d'intégration par parties existent pour l'intégrale de Riemann-Stieltjes et pour l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes.
*Formule* : $u$ et $v$ étant deux fonctions dérivables, de dérivées continues et $a$ et $b$ deux réels de leur intervalle de définition :

$$\int_a^b \boldsymbol{u(x)v'(x)dx} = [\boldsymbol{u(x)v(x)}]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{v(x)du(x)}$$ [4]

L'idée principale derrière l'intégration par parties est basée sur la règle du produit dans la dérivation, qui est l'inverse de la règle du produit dans l'intégration. En appliquant cette formule, on peut souvent simplifier un intégrale complexe en un produit plus simple, rendant ainsi son évaluation plus facile.[5]
L'intégration par parties est une technique puissante qui permet de simplifier les intégrales en transformant un produit en une différence. Elle est largement utilisée en analyse mathématique, en physique, en ingénierie et dans d'autres domaines des sciences appliquées.

## III. Relation de récurrence

Une relation de récurrence est une équation qui exprime chaque élément de la suite comme une fonction des éléments précédents. Elle est donc une équation qui exprime un terme d'une séquence en fonction des termes précédents de la même séquence.[6] Ces relations sont largement utilisées en mathématiques pour définir des suites ou des séquences de nombres, de polynômes, de fonctions, etc. Elles peuvent être utiles pour générer les termes successifs d'une séquence de manière itérative ou pour résoudre des problèmes récurrents.[7]

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, il existe un lien entre l'expression du rang $n+1$ de la suite et celle du rang $n$

Les relations de récurrence sont souvent utilisées pour définir des suites numériques ou des familles de fonctions, telles que les polynômes orthogonaux, les séries de Taylor, les suites récurrentes linéaires, etc. Elles permettent de générer de manière itérative les termes successifs de ces séquences, simplifiant ainsi leur définition et leur calcul

## IV. Intégration par récurrence

L'intégration par récurrence est une méthode utilisée pour évaluer les intégrales indéfinies de certaines fonctions, en particulier lorsque les méthodes traditionnelles telles que la substitution ne sont pas applicables.

[3] Whittaker, E. T., & Watson, G. N. (1996). A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press
[4] « Intégration par parties » sur Wikiversité
[5] Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning
[6] Sipser, M. (2012). Introduction to the Theory of Computation. Cengage Learning
[7] Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik, O. (1994). Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. Addison-Wesley

Contrairement à l'intégration par parties, qui manipule un produit de fonctions, l'intégration par récurrence implique la manipulation d'une intégrale récurrente.[8]
Il s'agit d'établir, dans ce paragraphe, des relations de récurrence pour les intégrales, en passant généralement par la méthode d'intégration par parties.
L'idée principale de l'intégration par récurrence est de transformer une intégrale complexe en une série d'intégrales plus simples, dont les solutions sont directement reliées aux solutions des termes précédents.[9]
L'intégration par récurrence est souvent utilisée pour résoudre des intégrales impliquant des fonctions rationnelles, des fonctions trigonométriques et d'autres fonctions dont les primitives ne sont pas immédiatement évidentes. Cette méthode nécessite une bonne compréhension des relations de récurrence et des techniques d'intégration par parties.[10]

**Exemples**

i. Primitive d'une puissance du logarithme

*Enoncé* : $I_n = \int \ln^n x\, dx$

- On trouve $I_0 = \int dx = x + c$ (c∈ ℝ);
- $I_1 = \int \ln x\, dx$, on intègre par parties en posant $u(x) = \ln x \;\; et \;\; dv(x) = dx$ pour obtenir $I_1 = x\ln(x) - x + c$ ou bien $I_1 = x\ln(x) - I_0$ ;
- $I_2 = \int \ln^2 x\, dx$, on pose $u(x) = \ln^2 x \;\; et \;\; dv(x) = dx$

Pour avoir $I_2 = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$ ou bien $I_2 = x\ln^2 x - 2I_1$

- même procédure pour trouver $I_3 = \int \ln^3 x\, dx$

$I_3 = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C$ ou bien $I_3 = x\ln^3 x - 3I_2$

De proche à proche on obtient $I_n = x\ln^n x - nI_{n-1}$

(note : pour calculer $I_{10} = \int \ln^{10} x\, dx$ il faut partir de $I_0$, $I_1$, …, jusqu'à $I_{10}$)

On itère alors les intégrations par parties, pour trouver

$I_n = x\ln^n x - nx\ln^{n-1} x + n(n-1)I_{n-2}$

$I_n = x\ln^n x - nx\ln^{n-1} x + n(n-1)x\ln^{n-2} x - n(n-1)(n-2)\, I_{n-3}$

. .

. .

. .

$I_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)x\ln^{n-k} x$

$I_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x\ln^{n-k} x$

ii. Grande puissance

*Enoncé* : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

*Indication* : Effectuer une intégrale par parties à partir de $I_n$

*Corrigé* : en posant $u(x) = (x^2+1)^{-n}$ et $v'(x) = 1$, une intégration par parties donne

$I_n = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{n+1}}$

Or $\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx = I_n - I_{n+1}$

Regroupant les termes, on trouve

$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{(2n-1)}{2n}I_n + \frac{1}{2n}\frac{1}{2^n}$

Sachant que $I_1 = [arc\; tanx]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

On trouve $I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ et $I_2 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$

iii. Primitive d'une puissance du sinus

*Enoncé* : $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int \sin^n x\, dx$

*Indication* : écrire $I_n = \int \sin^{n-1} x \sin^n x\, dx$

*Corrigé* : une intégration par parties donne,
en posant $u(x) = \sin^{n-1} x$ et $v(x) = -\cos x$,

$I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\, cos^2\, x\, dx$

Or $\sin^{n-2} x\, cos^2\, x = \sin^{n-2} x\,(1 - sin^2\, x) = \sin^{n-2} x - \sin^n x$

[8] Rosenlicht, M.(2016), *Introduction to analysis*. Dover Publications.
[9] Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). *Advanced Calculus*. John Wiley & Sons
[10] Knuth, D. E. (2011). The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms. Addison-Wesley

$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \sin^n x\, dx$
$I_n + (n-1)I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}$
$I_n = \frac{1}{n}[-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}]$ avec $n \geq 2$

## V. Quelques relations de récurrence[11]

| N° | Intégrale | Relation de récurrence[12] | Condition ($\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}; \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$) |
|---|---|---|---|
| 1 | $I_n = \int \sin^n x\, dx$ | $I_n = \frac{1}{n}[-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}]$ | $n \geq 2$ |
| 2 | $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ | $I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_n(x)$ | $n \geq 2$ |
| 3 | $I_n = \int \cos^n x\, dx$ | $I_n = \frac{1}{n}[\cos^{n-1} x \sin x + (n-1)I_{n-2}]$ | $n \geq 2$ |
| 4 | $I_n = \int_0^{\pi} \cos^n x \cos(nx)\, dx$ | $I_n = \frac{\pi}{2^n}$ | |
| 5 | $I_{p,k} = \int \cos^{2p}(x) \sin^{2k}(x)\, dx$ | $I_{p,k} = \frac{1}{2k+1}\cos^{2p-1}(x)\sin^{2k+1}(x) + \frac{2p-1}{2k+1} I_{p-1,k+1}$ | $p, k \geq 3$ |
| 6 | $I_n = \int \ln^n x\, dx$ | $I_n = x \ln^n x - nI_{n-1}$ | $n \geq 1$ |
| 7 | $I_{m,n} = \int x^m \ln^n x\, dx$ | $I_{m,n} = \frac{x^{m+1}\ln^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1}$ | $m, n \geq 1$ |
| 8 | $I_m = \int x^m \ln(x^2 \pm a^2)\, dx$ | $I_m = \frac{x^{m+1}\ln(x^2 \pm a^2)}{m+1} - \frac{2}{m+1}\int \frac{x^{m+2}}{x^2 \pm a^2} dx$ | |
| 9 | $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ | $I_n = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} I_{n-1}$ | $n \geq 2$ |
| 10 | $I_{m,n} = \int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^n}$ | $I_{m,n} = \frac{1}{a^2} I_{m,n-1} + \frac{1}{a^2} I_{m-2,n}$ | $n \geq 1\ et\ m \geq 2$ |
| 11 | $I_n = \int x^n \mathrm{e}^{ax} dx$ | $I_n = \frac{x^n \mathrm{e}^{ax}}{a} - \int x^{n-1}\mathrm{e}^{ax} dx$ | $n \geq 1$ |
| 12 | $I_n = \int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^n} dx$ | $I_n = \frac{-\mathrm{e}^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^{n-1}} dx$ | $n \geq 2$ |
| 13 | $I_{m,n} = \int \frac{x^m dx}{(x^n+a^n)^r}$ | $I_{m,n} = \int \frac{x^{m-n}}{(x^n+a^n)^{r-1}} dx - a^n \int \frac{x^{m-n}}{(x^n+a^n)^r} dx$ | $r \neq 1$ |
| 14 | $I_{m,n} = \int \frac{dx}{x^m(x^n+a^n)^r}$ | $I_{m,n} = \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{x^m(x^n+a^n)^{r-1}} - \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{x^{m-n}(x^n+a^n)^r}$ | $r \neq 1$ |
| 15 | $I_{m,n} = \int \frac{x^m}{(x^n-a^n)^r} dx$ | $I_{m,n} = a^n \int \frac{x^{m-n}}{(x^n-a^n)^r} dx + \int \frac{x^{m-n}}{(x^n-a^n)^{r-1}} dx$ | $r \neq 1$ |
| 16 | $I_n = \int \frac{dx}{x^m(x^n-a^n)^r}$ | $I_n = \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{x^{m-n}(x^n-a^n)^r} - \frac{1}{a^n}\int \frac{dx}{x^m(x^n-a^n)^{r-1}}$ | $r \neq 1$ |
| 17 | $I = \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx$ | $I = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}} dx$ | |
| 18 | $I = \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx$ | $I = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}} dx$ | |
| 19 | $I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{ax+b}} dx$ | $I_m = \frac{2x^m\sqrt{ax+b}}{(2m+1)a} - \frac{2bm}{(2m+1)a}\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{ax+b}} dx$ | $m \geq 1$ |
| 20 | $I_m = \int x^m \sqrt{ax+b}\, dx$ | $I_m = \frac{2x^m\sqrt{(ax+b)^3}}{(2m+3)a} - \frac{2bm}{(2m+3)a}\int x^{m-1}\sqrt{ax+b}\, dx$ | $m \geq 1$ |
| 21 | $I_m = \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^m} dx$ | $I_m = \frac{-\sqrt{(ax+b)^3}}{(m-1)bx^{m-1}} - \frac{(2m-5)a}{(2m-2)b} I_{m-1}$ | $m \geq 1$ |
| 22 | $I_n = \int \frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}} dx$ | $I_n = \frac{2(px+q)^n}{(2n+1)a}\sqrt{ax+b} + \frac{2n(aq-bp)}{(2n+1)a} + \frac{2n(aq-bp)}{(2n+1)a} I_{n-1}$ | $n \geq 1$ |
| 23 | $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$ | $\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{ap}} \ln\left(\sqrt{a(px+q)} + \sqrt{p(ax+b)}\right) \\ \frac{2}{\sqrt{ap}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{-p(ax+b)}{a(px+q)}} \end{cases}$ | |
| 24 | $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$ | $I = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{ap} - \frac{bp-aq}{2ap}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$ | |
| 25 | $I = \int \sqrt{\frac{px+q}{ax+b}} dx$ | $I = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{a} + \frac{aq-bp}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$ | |
| 26 | $I_n = \int \sqrt{(ax+b)(px+q)}\, dx$ | $I = \frac{2apx+bp+aq}{4ap}\sqrt{(ax+b)(px+q)} - \frac{(bp-aq)^2}{8ap}\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$ | |

[11] D. MPAKASA, *Maîtriser les maths 6*, éd. LOYOLA, 2010, pg 183
[12] https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/analyse/integration/foncdefintegrales&type=fexo

## VI. Conclusion

L'intégration par parties est une technique fondamentale du calcul intégral. Cette étude des relations de récurrence pour les intégrales en analyse mathématique constitue un sujet important et fondamental qui trouve des applications dans de nombreux domaines des mathématiques et des sciences. La capacité à exprimer une intégrale en fonction de termes précédents de la même intégrale peut simplifier considérablement l'évaluation d'intégrales complexes et permettre des solutions élégantes à divers problèmes mathématiques et appliqués. Les relations de récurrence pour les intégrales sont des équations qui permettent de calculer une intégrale en fonction des autres intégrales déjà connues. Elles sont particulièrement utiles pour simplifier le calcul d'intégrales complexes. Il existe de nombreuses relations de récurrence, et leur forme dépend souvent de la fonction à intégrer.

Une des relations de récurrence les plus courantes est celle pour les intégrales définies, qui est basée sur la propriété *additivité* de l'intégrale :

Si vous avez une intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$, vous pouvez la diviser en deux intégrales plus petites en choisissant un point $c$ à l'intérieur de l'intervalle $[a,b]$. Vous obtenez alors : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Cette relation permet de décomposer une intégrale en deux intégrales plus simples, ce qui peut être utile pour simplifier le calcul.

Il existe d'autres relations de récurrence spécifiques pour certaines fonctions, telles que les intégrales trigonométriques, exponentielles, logarithmiques, etc.

Ces relations dépendent des propriétés des fonctions et peuvent être utilisées pour réduire des intégrales plus complexes en termes d'intégrales plus simples.

En résumé, les relations de récurrence sont un outil important en calcul intégral pour simplifier les calculs d'intégrales en les décomposant en intégrales plus petites et mieux connues.

## Bibliographie

[1]. D. MPAKASA, Maîtriser les maths 6, ed. LOYOLA, 2010
[2]. Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik, O. (1994). Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. Addison-Wesley
[3]. Graham, Ronald L.; Knuth, Donald E.; Patashnik, Oren (February 1994). Concrete Mathematics - A foundation for computer science (2nd ed.).
[4]. https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Int%C3%A9gration_par_parties
[5]. https://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/analyse/integration/foncdefintegrales&type=fexo
[6]. https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/mathdl/CMJ/Horowitz307-311.pdf[archive]
[7]. Knuth, D. E. (2011). The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms. Addison-Wesley
[8]. N. Bourbaki, Fonctions d'une variable réelle (1ère ed. 1949)
[9]. Rosenlicht, M.(2016), Introduction to analysis. Dover Publications
[10]. Sipser, M. (2012). Introduction to the Theory of Computation. Cengage Learning
[11]. Stanistawhartman(de) et Jan Mikusinski, The Theory of Lebesgue Measure and Integration, Pergamon, 1961
[12]. Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning
[13]. Taylor, A. E., & Mann, W. R. (1983). Advanced Calculus. John Wiley & Sons
[14]. Thomas, G.B. ; Finney, R.L. (1988). Calculus and AnalyticGeometry (7th ed.) Reading, MA : Addison-Wesley. (ISBN 0-201-17069-8).
[15]. Whittaker, E. T., & Watson, G. N. (1996). A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press