IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)
e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X. Volume 14, Issue 3 Ver. I (May - June 2018), PP 26-29
www.iosrjournals.org

Les Nombres Graphiques Et Le Problème P=NP

M. SGHIAR
9 allée capitaine J. B. Bossu, 21240, Talant, France

Abstract : *I will prove the existence of a function f_n with values in $\mathbb{N}$ on any Graph $G/\{X_1,\ldots,X_n\}$ with cardinal n , such that either $f_n(X_1)$ is equal to 0 or it is the sum of all hamiltonian cycles. The number of the operations to be performed to calculate $f_n(X_1)$ is of the order $O(n^3)$ and that it follows that we have $P=NP$.*

Résumé : *Je démontre l'existence d'une fonction f_n à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur tout Graphe $G/\{X_1,\ldots,X_n\}$ de cardinal n , telle que soit $f_n(X_1)$ est égal à 0 soit elle est la somme de tous les cycles hamiltoniens. Le nombre d'opérations à effectuer pour calculer $f_n(X_1)$ est de l'ordre de $O(n^3)$ et il en résulte qu'on a bien $P=NP$.*

Keywords: *Graph, Hamilton cycles, P=NP, the knapsack problem, the travelling salesman problem, TSP, KP.*

Date of Submission: 20-04-2018 Date of acceptance: 07-05-2018

I- INTRODUCTION :

En théorie des graphes, un graphe non orienté G = (V, E) est défini par la donnée d'un ensemble V de sommets et d'un ensemble E d'arêtes, chaque arête étant une paire de sommets (par exemple, si x et y sont des sommets, la paire $\{x,y\}$ - notée xy - peut être une arête du graphe G). Si $\{x,y\}$ est une arête du graphe G : On notera $G(x,y)=1$ sinon $G(x,y)=0$.

Un graphe hamiltonien est un graphe possédant au moins un cycle passant par tous les sommets une fois et une seule. Un tel cycle élémentaire est alors appelé cycle hamiltonien.

Plusieurs travaux ont été faits sur les graphes pour permettre de s'assurer qu'un graphe est hamiltonien. je cite par exemple Gabriel Andrew Dirac [3], Oystein Ore [4] et Lajos Posa [5]

S'inspirant du théorème de Ore, John Adrian Bondy et Vaclav Chvatal ont trouvé en 1976 [6] une méthode pour déterminer si un graphe est hamiltonien.

Le problème du chemin hamiltonien consiste à :

- Trouver une chaîne hamiltonienne ou un cycle hamiltonien dans un graphe non orienté donné.

- Ou à trouver un chemin hamiltonien ou un circuit hamiltonien dans un graphe orienté donné.

Tous ces problèmes sont NP-complets [1] et [2] : c'est-à-dire qu'on sait vérifier une éventuelle solution dans un temps polynomial en fonction du nombre n de sommets, mais que ce problème est au moins aussi difficile que d'autres problèmes NP-complets, ce qui veut dire que l'on ne saura probablement pas trouver cette solution dans un temps polynomial dans le cas général. Le problème de décision associé est de tester si un cycle ou une chaîne hamiltonienne existe.

Le problème du voyageur de commerce - qui est considéré comme un NP-complet [8, 9 et 10] - revient à chercher un cycle hamiltonien dans un graphe dont les arêtes sont pondérées, en ajoutant une contrainte : le poids de ce cycle doit être minimal.

Dans cet article, je vais introduire deux nouvelles opérations (somme et produit) que l'on appliquera sur les sommets d'un graphe de cardinal n pour trouver les cycles hamiltoniens lorsqu'ils existent.

Plus précisément, à partir des dites opérations, on va construire une fonction f_n qui permet de décider si les cycles hamiltoniens existent et permet de les trouver.

Tout simplement dans le théorème 1, on va voir que si f_n ne s'annule pas sur un somment, alors la valeur de f_n sur ce sommet est la somme de tout les cycles hamiltoniens. (Ne soyez pas surpris car on va voir que les chemins sont des nombres).

Avec ces nombres, ces étranges opérations et cette fonction f_n , on va voir que le nombre d'opérations à effectuer est de l'ordre de $O(n^3)$ - exactement comme on a vu dans [7] mais matriciellement - et qu'il en découle l'existence d'un algorithme polynomiale pour résoudre le problème du voyageur de commerce. Et comme ce dernier problème est un problème NP-Complet (voir [1] et [2]), il en résulte donc qu'on a bien P=NP.

II- Définitions Des Nombres Graphiques :

Un nombre p- n-graphique est un nombre de type : $31E12D20X_1 0X_2 0\ldots 0X_l 03$ avec $l\leq n+1$ (p pour petit).

Où :

- $X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_l$ est un chemin.
- X_i est un entier où n'apparaissent pas les éléments 0, 1, 2 ou 3 et représente un sommet d'un graphe de cardinal n.

- E est un entier plus petit ou égale n qui représente l'énergie restante lorsque l'on arrive au point X_l .

- D est un entier naturel et représente la distance parcourue en en empruntant le chemin : $X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_l$.

Les zéros sont introduits pour séparer les nombres représentant les sommets d'un graphe : $G/\{X_1,\ldots X_n\}$.

Les chiffres 1 permettent de lire l'énergie restante lorsque l'on arrive au point X_l .

Les chiffres 2 permettent de lire la distance parcourue en empruntant le chemin $X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_l$.
Dans la suite on confond le chemin $X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_l$ et le **nombre p- n-graphique** $31E12D20X_1 0X_2 0\ldots 0X_l 03$. On pose $d(31E12D20X_1 0X_2 0\ldots 0X_l 03)=D$.

Remarque 1 :
- L'idée de l'introduction de l'énergie E dans l'article [7] était inspirée du cycle hamiltonien coeur- artères :

III - Somme De Deux P-N-Nombres Graphiques :

La somme de deux p-n-nombres graphiques est définie à **une permutation près** par :

$$31E_1 12D_1 20X_{1,1} 0X_{2,2} 0\ldots 0X_{1,l} 03+31E_2 12D_2 20X_{2,1} 0X_{2,2} 0\ldots 0X_{2,m} 03 =$$

$$31E_1 12D_1 20X_{1,1} 0X_{1,2} 0\ldots 0X_{1,l} 0331E_2 12D_2 20X_{2,1} 0X_{2,2} 0\ldots 0X_{2,m} 03 =$$
$$31E_2 12D_2 20X_{2,1} 0X_{2,2} 0\ldots 0X_{2,m} 0331E_1 12D_1 20X_{1,1} 0X_{1,2} 0\ldots 0X_{1,l} 03$$

Un nombre n-graphique est une somme finie de p-n- nombres graphiques .

- Notons L_n l'ensemble des n nombres graphiques ($L_n \subset \mathbb{N}$). Dans la suite on considère que 0 est un nombre n graphique (élément neutre de L_n).

IV- Produit D'un P-N- Nombre Graphique Par Un Entier $Y \in \{X_1, \dots, X_n\}$:

Le produit $31E12D20X_1 0X_2 0\dots 0X_l 03 \times Y$ est le nombre graphique défini comme suit :

Si $Y \neq X_1$ et $Y \in \{X_1, \dots, X_l\}$: $31E12D20X_1 0X_2 0\dots 0X_l 03 \times Y = 0$

Si $Y \neq X_1$ et $Y \notin \{X_1, \dots, X_l\}$: $31E12D20X_1 0X_2 0\dots 0X_l 03 \times Y$ Est le nombre graphique :

- $31E-112D+D(X_l, Y)20X_1 0X_2 0\dots 0X_l 0Y03$ si $D(X_l, Y) \neq 0$ et $l \leq n-1$
- 0 si $D(X_l, Y) = 0$

Si $Y = X_1$: $31E12D20X_1 0X_2 0\dots 0X_l 03 \times Y$ Est le nombre :

- $31012D+D(X_l, Y)20X_1 0X_2 0\dots 0X_l 0Y03$ si $D(X_l, Y) \neq 0$ et $l = n$.
- 0 sinon.

V- PRODUIT D'UN NOMBRE GRAPHIQUE $\sum_{i \in I} N_i$ **PAR UN ENTIER** $Y \in \{X_1, \dots, X_n\}$

On pose : $\left(\sum_{i \in I} N_i\right) \times Y = \sum_{i \in I} N_i \times Y$

VI- Suites De Fonctions :

Posons $\widetilde{X}_1 = 3n32020X_1 0$ et posons $f_1(X_i) = \widetilde{X}_1 \times X_i \quad \forall\ i \in \{2, \dots, n\}$

Soit f_l la suite de fonctions définie de $\{X_1, \dots, X_n\}$ sur L_n par :

$$f_l(X_i) = \sum_{j \neq i} f_{l-1}(X_j) \times X_i \quad \forall\ i \in \{1, \dots, n\} \text{et} \forall\ l \geq 2 \tag{1}$$

Théorème 1:

$f_n(X_1)$ est soit égal à 0 soit il est la somme de tous les cycles hamiltoniens .

Preuve : Se déduit des idées exposées dans les articles [7 à 10] et qui ont été testées par des algorithmes (écrits en langage Python).

Corollaire 1:

Si $f_n(X_1) \neq 0$ et si $f_n(X_1) = \sum_{i \in I} N_i$, alors : N_m est un cycle hamiltonien de distance minimale si : $d(N_m) = \inf d(N_i)\ ,\ i \in I$.

Corollaire 2: Pour trouver par f_n tous les cycles hamiltoniens, en particulier les cycles hamiltoniens de distances minimales, le nombre d'opération à effectuer est de l'ordre $O(n^3)$.
Preuve : Se déduit du Théorème ci dessus et de l'équation (1).

Remarque 2 :
- Ce résultat sur l'ordre $O(n^3)$ confirme bien celui trouvé dans l'article [7] .

VII-Conclusion :

En introduisant les nouvelles opérations d'addition et de multiplication , la fonction f_n permet de décider si il existe ou non des cycles hamiltoniens et de les définir le cas échéant, de plus le nombre d'opérations est de l'ordre de $O(n^3)$, ce qui donne une résolution du problème $P = NP$! .

S'il faut solliciter de plus en plus de la mémoire en fonction de n ce qui est tout à fait normal, alors techniquement pour pallier ce problème de mémoire on pourra utiliser la méthode utilisée dans [10] pour éviter sa saturation.

Références

[1]. Michael R. Garey et David S. Johnson,A Guide to the Theory of NP -Completeness,Computers and Intractability , W. H. Freeman,1979,199−200, ISBN 0-7167-1045-5.

[2]. Chuzo Iwamoto et Godfried Toussaint, Finding Hamiltonian circuits in arrangements of Jordan curves is NP-complete, Information Processing Letters, 1994, volume 52, number 15, pages183–189.

[3]. Gabriel Andrew Dirac, Some theorems on abstract graphs, Proceedings of the London Mathematical Society, 1952, 3e série,vol. 2, pages 69–81.

[4]. Oystein Ore, A Note on Hamiltonian Circuits, American Mathematical Monthly, 1960, number 67, pages 55.

[5]. Lajos Posa, A theorem concerning hamilton lines, journal Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl., 1962, volume 7, pages 225–226.

[6]. John Adrian Bondy et Vaclav Chvatal, A method in graph theory, Discrete Math, 1976, volume 15, 111–135.

[7]. M. Sghiar. Algorithmes quantiques, cycles hamiltoniens et la k-coloration des graphes. Pioneer Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,17-Issue 1:51–69, May 2016.

[8]. M. Sghiar. Atomic algorithm and the servers' s use to find the hamiltonian cycles. International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA), ISSN: 2248-9622, 6-Issue 6:23–30, jun 2016.

[9]. M. Sghiar, An electronic algorithm to find the optimal solution for the travelling salesman problem. IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X, 12:82–86, August 2016.

[10]. M. Sghiar, The optimal solution for the Knapsack problem find by The electronic algorithm, IOSR Journal of Mathematics(IOSR-JM), International Organization Of Scientific Research, 2016, 12 (5), pp.54-57 .

M. SGHIAR "Les Nombres Graphiques Et Le Problème P=NP.IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM) 14.3 (2018): 26-29.